Analysis

Ableitungsfunktionen 3

Verkettung von Funktionen

Kettenregel

Trainingsheft

Datei 41103

Stand 30.12.2010

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Das Problem einer jeden Bibliothek ist sehr oft das Suchen und Finden eines geeigneten Textes.
Da es sehr viele Texte zu Ableitungen gibt, die zudem noch über diverse Funktionenbereiche verteilt sind, habe ich diesen „Zentraltext für Ableitungen“ angefertigt.
Er bringt eine ziemlich tief gehende Übersicht über Ableitungen von allerlei Funktionen.
Und zu jedem Thema findet man Verweise auf andere Texte, die noch mehr Übungen bereitstellen.
Außerdem folgt jetzt gleich eine Übersichtsliste aller Funktionen, in denen es um das „handwerkliche“ Ableiten geht, also nicht um deren Anwendungen.

41100	Zentraltext für Ableitungen
41101	Ableitungen mit der Grenzwertmethode berechnen. Beweis einiger Ableitungsregeln mit der Grenzwertmethode.
41102	Hier werden nur mit der Potenzregel, der Regel für konstante Faktoren und der Summenregel ganzrationale Funktionen abgeleitet, dann gebrochen-rationale Funktionen, die man in die Potenzschreibweise setzen kann, und ebenso einfache Wurzelfunktionen. Kettenregel, Produktregel und Quotientenregel werden nicht verwendet,
41103	**Kettenregel mit Anwendungen auf viele Funktionsarten (Dieser Text)**
41105	Implizite Ableitungen (Teil 1 auf (höherem) Schulniveau)
41113	Ableitungen zusammengesetzter Funktionen, Differenzierbarkeit.
41130	50 Ableitungsbeispiele (Arbeit eines Schülers)
43015	Ableitung gebrochen rationaler Funktionen – Quotientenregel
43016	Übungsaufgaben aus 43015
44012	Ableitung von Wurzelfunktionen, auch komplizierte Funktionen.
45013	Ableitung von Exponentialfunktionen.
45021	Ableitung von Exponentialfunktionen mit vollständiger Induktion
46012	Ableitung von Logarithmusfunktionen
47015	Ableitung von trigonometrischen Funktionen
51020	Implizite Ableitungen (Teil 2 für Studenten)

Februar 2011.

Voraussetzung für diesen Text

ist die Beherrschung der anderen Ableitungsregeln, die in 41101 besprochen worden sind wie

Potenzregel:	$f(x)=x^n \;\Rightarrow\; f'(x)=n\cdot x^{n-1}$
Summenregel:	$f(x)=u(x)+v(x) \;\Rightarrow\; f'(x)=u'(x)+v'(x)$
Konstante-Faktorenregel:	$f(x)=r\cdot u(x) \;\Rightarrow\; f'(x)=r\cdot u'(x)$.
Produktregel:	$f(x)=u(x)\cdot v(x) \;\Rightarrow\; f(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$
Quotientenregel:	$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$

Ferner sollte man wissen, dass die Potenzregel für alle Exponenten gilt:

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \;\Rightarrow\; f'(x)=-1\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \;\Rightarrow\; f'(x)=-2\cdot x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\tfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Viele Übungen dazu gibt es auch im Zentraltext für Ableitungen mit der Nummer 41100.

Inhalt

1 Verkettung von Funktionen

Führt man 2 Funktionen nacheinander aus, dann nennt man das Funktionen verketten.

Beispiel 1

$f(x) = 2x - 3$ wird mit $g(x) = x^2$ verkettet.

Das heißt, dass man den Funktionswert 2x-3 in g einsetzt oder umgekehrt.

Berechnungsbeispiele dazu:

Wir wählen x = 1 und berechnen dazu $f(1) = -1$. Diese Zahl nennen wir u.

Jetzt wird u = -1 in g eingesetzt: $g(-1) = 1$.

Ersetzen wir g(-1) durch $g(f(1))$, dann erkennt man dass auf x=1 zuerst f und auf das Ergebnis dann g angewandt worden ist. Das kann man auch so schreiben:

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = -1.$$

Mit $\boxed{g \circ f}$ bezeichnet man die durch Verkettung entstandene neue Funktion.

Man lies das $\boxed{\text{„g nach f“}}$:

$$g \circ f: \quad 1 \xrightarrow{f} \underbrace{\boxed{-1}}_{=u} \xrightarrow{g} 1$$

Zu x = 4 berechnen wir $f(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$. Diese Zahl nennen wir u.

Jetzt wird u = 5 in g eingesetzt: $g(5) = 5^2 = 25$.

Ersetzen wir g(5) durch $g(f(4))$, dann erkennt man dass auf x=4 zuerst f und auf das Ergebnis dann g angewandt worden ist. Das kann man auch so schreiben:

$$g \circ f(4) = g(f(4)) = 25.$$

Als Pfeildiagramm: $g \circ f: \quad 4 \xrightarrow{f} \underbrace{5}_{=u} \xrightarrow{g} 25$.

Zu x = -5 berechnen wir $f(-5) = 2 \cdot (-5) - 3 = -13$. Diese Zahl nennen wir u.

Jetzt wird u = -13 in g eingesetzt: $g(-13) = (-13)^2 = 169$.

Auf x=-5 ist zuerst f und auf das Ergebnis dann g angewandt worden.

Das kann man auch so schreiben:

$$g \circ f(-5) = g(f(-5)) = 169.$$

Als Pfeildiagramm: $g \circ f: \quad -5 \xrightarrow{f} \underbrace{\boxed{-13}}_{=u} \xrightarrow{g} 169$.

Zu $x = \frac{3}{2}$ $\quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = \boxed{0 = u}$, $\quad g(0) = 0^2 = 0$, also

$$g \circ f: \quad \frac{3}{2} \xrightarrow{f} \underbrace{\boxed{0}}_{=u} \xrightarrow{g} 0$$

Dies kann man auch ohne Zahlen, also ganz allgemein durchführen:

Aus x berechnet man $u = f(x) = 2x - 3$, Das wird in g eingesetzt: $g(u) = u^2 = (2x-3)^2$

$$x \xrightarrow{f} \boxed{u} \xrightarrow{g} u^2$$

Schreibt man für u wieder 2x-3, erhält man

$$g \circ f: \quad x \xrightarrow{f} \boxed{2x-3} \xrightarrow{g} (2x-3)^2$$

Ein Problem ist dabei die Reihenfolge der Anwendung. Da wir zuerst f angewandt haben, entsteht aus x eben f(x) = u. Dann wendet man g an und erhält g(u) also g(f(x)). Diese Reihenfolge von g und f übernimmt man in die Schreibweise $g \circ f$, die man **„g nach f"** liest. Anfänger irritiert diese umgekehrte Reihenfolge: Die rechts stehende Funktion kommt zuerst zur Anwendung.

Zum Verständnis ändern wir jetzt einmal die Reihenfolge in $f \circ g$, dann muss man zuerst g berechnen und das Ergebnis anschließende in f einsetzen:

$$x \xrightarrow{g} \boxed{u = x^2} \xrightarrow{f} 2u - 3$$

$$x \xrightarrow{g} \boxed{x^2} \xrightarrow{f} 2x^2 - 3$$

z. B.: $$1 \xrightarrow{g} \boxed{1} \xrightarrow{f} -1$$

$$-5 \xrightarrow{g} \boxed{25} \xrightarrow{f} 47$$

Man erhält also bei $f \circ g(x) = (2x-3)^2$ andere Ergebnisse als bei $g \circ f(x) = 2x^2 - 3$.

Usw.

2.2 Gebrochen rationale Funktionen ohne x im Zähler

a) $f(x) = \frac{1}{4x+1} = (4x+1)^{-1}$ Wenn im Zähler kein x steht, schreibt man den Funktionsterm so um.

Zuerst wird die Klammer berechnet, dies macht die **innere Funktion** $u = 4x+1$ mit $u' = 4$.

Dann kommt die **äußere Funktion** zur Anwendung: $f(u) = u^{-1}$ mit $f'(u) = -u^{-2} = -\frac{1}{u^2}$

Berechnung der Ableitung: $\boxed{f'(x) = f'(u) \cdot u'}$.

$$f'(x) = -u^{-2} \cdot 4 = -\frac{4}{u^2} = -\frac{4}{(4x+1)^2}$$

Berechnung der 2. Ableitung:

Weil im Zähler von f' kein x steht, schreibt man den Funktionsterm so um: $f'(x) = -4 \cdot (4x+1)^{-2}$.

Zuerst wird die Klammer berechnet, die macht die **innere Funktion** $u = 4x+1$.

Dann kommt die **äußere Funktion** zur Anwendung: $f'(u) = -4u^{-2}$.

Berechnung der Ableitung: $\boxed{f'(x) = f'(u) \cdot u'}$

$$f''(x) = (-4) \cdot (-2)u^{-3} \cdot 4 = 32 \cdot u^{-3} = \frac{32}{u^3} = \frac{32}{(4x+1)^3}$$

b) $f(x) = \frac{16}{2-x} = 16 \cdot (2-x)^{-1}$

Zuerst wird die Klammer berechnet, dies macht die **innere Funktion** $u = 2-x$ mit $u' = -1$

Dann kommt die **äußere Funktion** zur Anwendung: $f(u) = 16 \cdot u^{-1}$ mit $f'(u) = 16 \cdot (-u^2)$

Berechnung der Ableitung: $\boxed{f'(x) = f'(u) \cdot u'}$

$$f'(x) = -16 \cdot u^{-2} \cdot (-1) = \frac{16}{u^2} = \frac{16}{(2-x)^2}$$

Berechnung der 2. Ableitung:

Weil im Zähler von f' kein x steht, schreibt man den Funktionsterm so um: $f'(x) = 16 \cdot (2-x)^{-2}$.

Zuerst wird die Klammer berechnet, die macht die **innere Funktion** $u = 2-x$ mit $u' = -1$.

Dann kommt die **äußere Funktion** zur Anwendung: $f'(u) = 16 \cdot u^{-2}$ mit $f''(u) = -32 \cdot u^{-3}$

Berechnung der Ableitung: $\boxed{f'(x) = f'(u) \cdot u'}$

$$f''(x) = -32 \cdot u^{-3} \cdot (-1) = 32 \cdot u^{-3} = \frac{32}{u^3} = \frac{32}{(2-x)^3}$$

usw. auf CD.